2009年 5月14日

B4課題発表

063209B 海老原龍夫

移流拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = \upsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$: 時間変化項

$U \frac{\partial f}{\partial x}$: 対流項

$\upsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: 拡散項

U : 移流速度

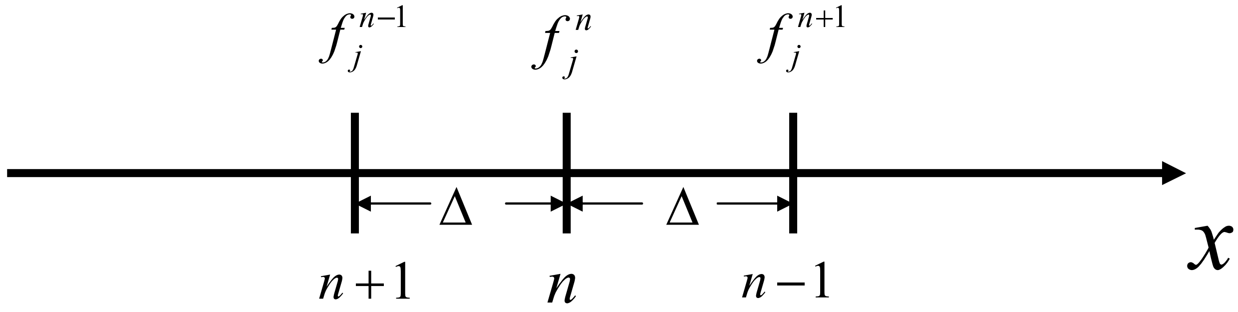
$U = 0$ の時拡散方程式

υ : 拡散係数

$\upsilon = 0$ の時移流方程式

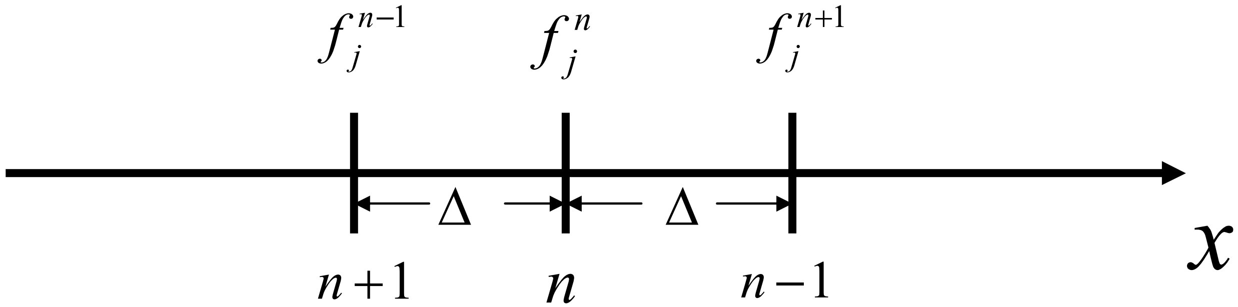
有限差分法

- 単に差分法と呼ばれることが多く、微分型の流れの方程式を基礎とし、格子点の上でのその解を求めようとする。
- 基礎方程式の中の微係数、つまり速度や圧力の勾配は差分商によって近似される。したがって、差分法では構造格子が使用される。



差分法の種類

- 前進差分：本来の微分をとる点nに対して、近似としてその次の点$n+1$とnとの間で差分をとる方法 。
- 後退差分：同様に、nとその前の点$n-1$との間で差分をとる方法 。
- 中心差分：nに対して、$n+1$と$n-1$との間で差分をとる（前進差分と後退差分を平均する）方法。



境界条件の設定

- ディィレクレ境界条件
  境界値の値を規定
  ↓
  内部の値が決定

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), \\ u_t(0, x) = g(x) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

- ノイマン境界条件
  境界の性質を規定
  ↓
  境界上の値は内部領域の値によって決まる。

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), \\ u_t(0, x) = g(x) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

移流拡散方程式の離散化(1)

時間変化項 $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ の離散化

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$$

対流項 : $U \dfrac{\partial f}{\partial x}$ の離散化　　$U \geq 0$ とした

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x}$$ より $$U \frac{\partial f}{\partial x} = U \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x}$$

移流拡散方程式の離散化（２）

拡散項：$\upsilon \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$の離散化

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x}\right) = \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\downarrow$$

$$\upsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \upsilon \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

f_j^{n+1}の導出

移流拡散方程式の時間変化項、対流項、拡散項のそれぞれに離散化した式を代入すると、次のような式が導かれる。

$$\frac{f_j^{n+1}-f_j^n}{\Delta t}+U\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{\Delta x}=\upsilon\frac{f_{j+1}^n-2f_j^n-f_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\downarrow$$

$$f_j^{n+1}=\left(\upsilon\frac{f_{j+1}^n-2f_j^n+f_{j-1}^n}{\Delta x^2}-U\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{\Delta x}\right)\Delta t+f_j^n$$

安定条件

$$
\begin{cases}
\text{クーラン数：} C \equiv U\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \\[2ex]
\text{格子レイノイズ数：} R \equiv U\dfrac{\Delta x}{\upsilon} \leq 2 \\[2ex]
\text{拡散数：} d \equiv \dfrac{C}{R} = \dfrac{\upsilon \Delta t}{\Delta x^2} \leq \dfrac{1}{2}
\end{cases}
$$

$$\downarrow$$

$$f_j^{n+1} = df_{j+1}^{n} + \left(-2d - C + 1\right) f_j^{n} + \left(d + C\right) f_{j-1}^{n}$$

初期条件、境界条件

範囲 $: 0 \leq x \leq 100$

時間 $: 0 \leq t \leq 100$

$$\begin{cases} \text{クーラン数}: C = 0.3 \\ \text{拡散数}: d = 0.3 \end{cases}$$

$$f_j^0 = f_j^1 = 0$$

$$f_j^{100} = f_j^{99} = 0$$

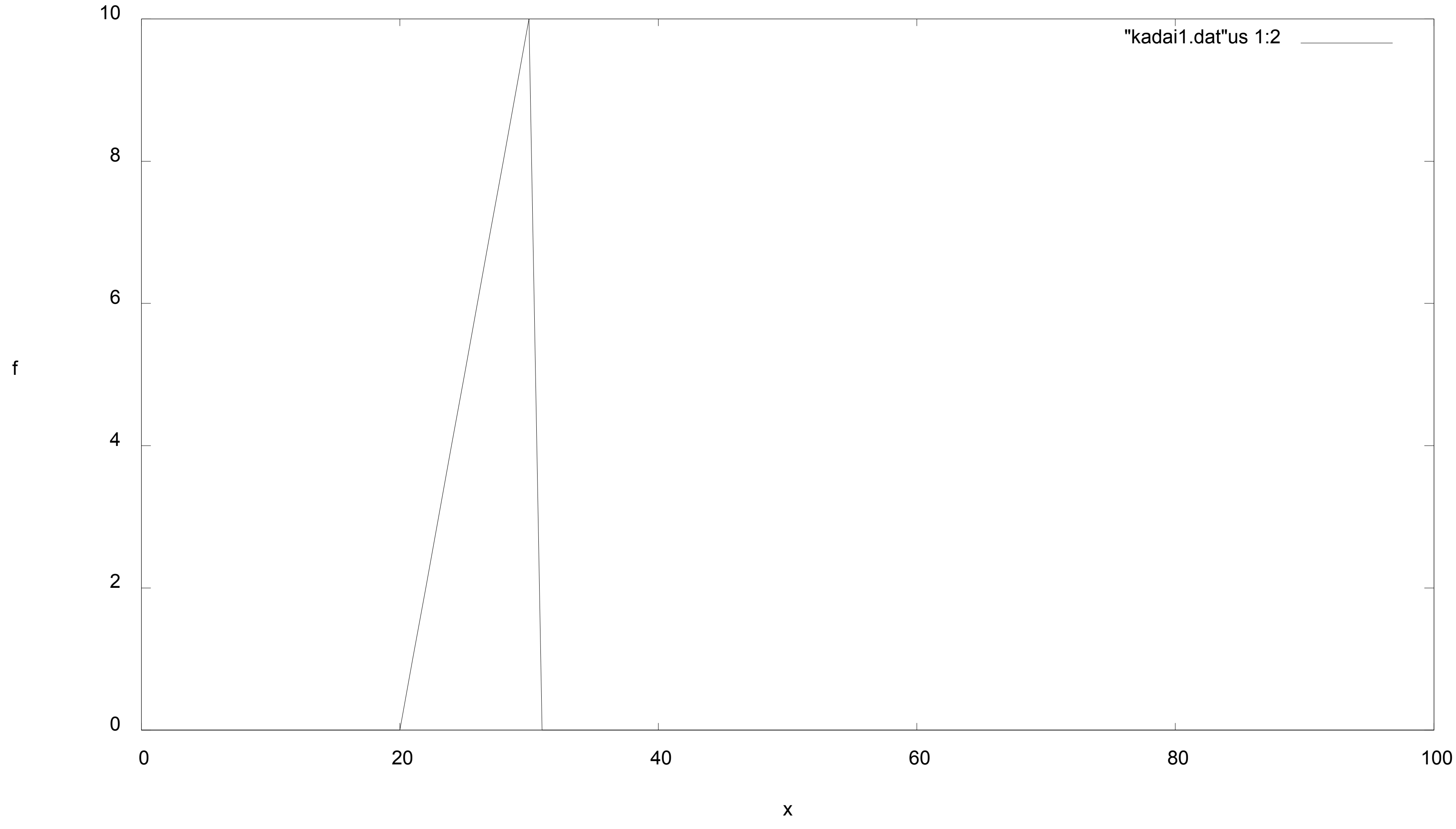
$20 \leq x \leq 30$の時

$$f_j^n = x - 20$$

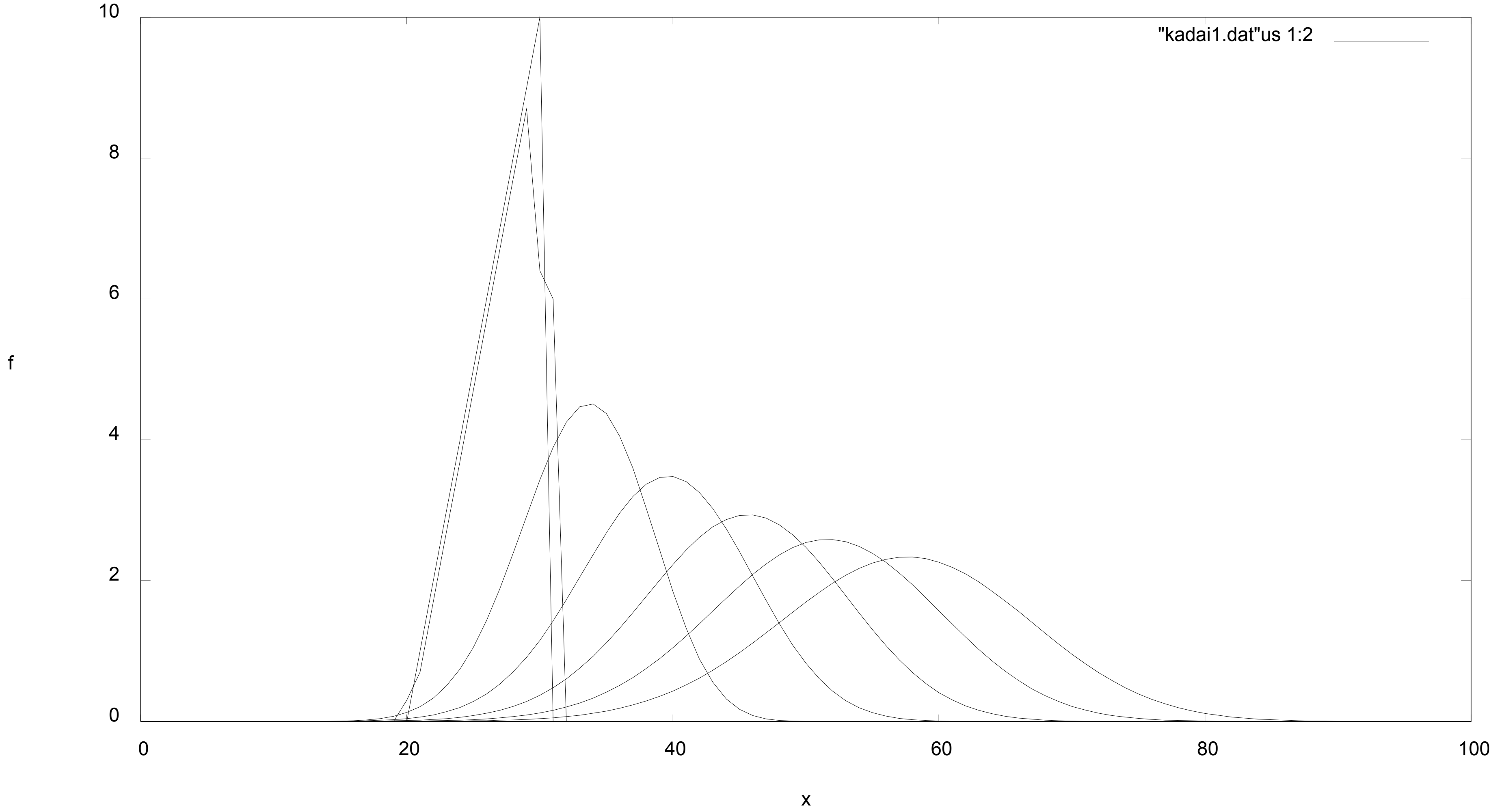
$0 \leq x \leq 20 \quad 30 \leq x \leq 100$の時

$$f_j^n = 0$$

シミュレーション(初期)



シミュレーション結果
(移流拡散方程式)

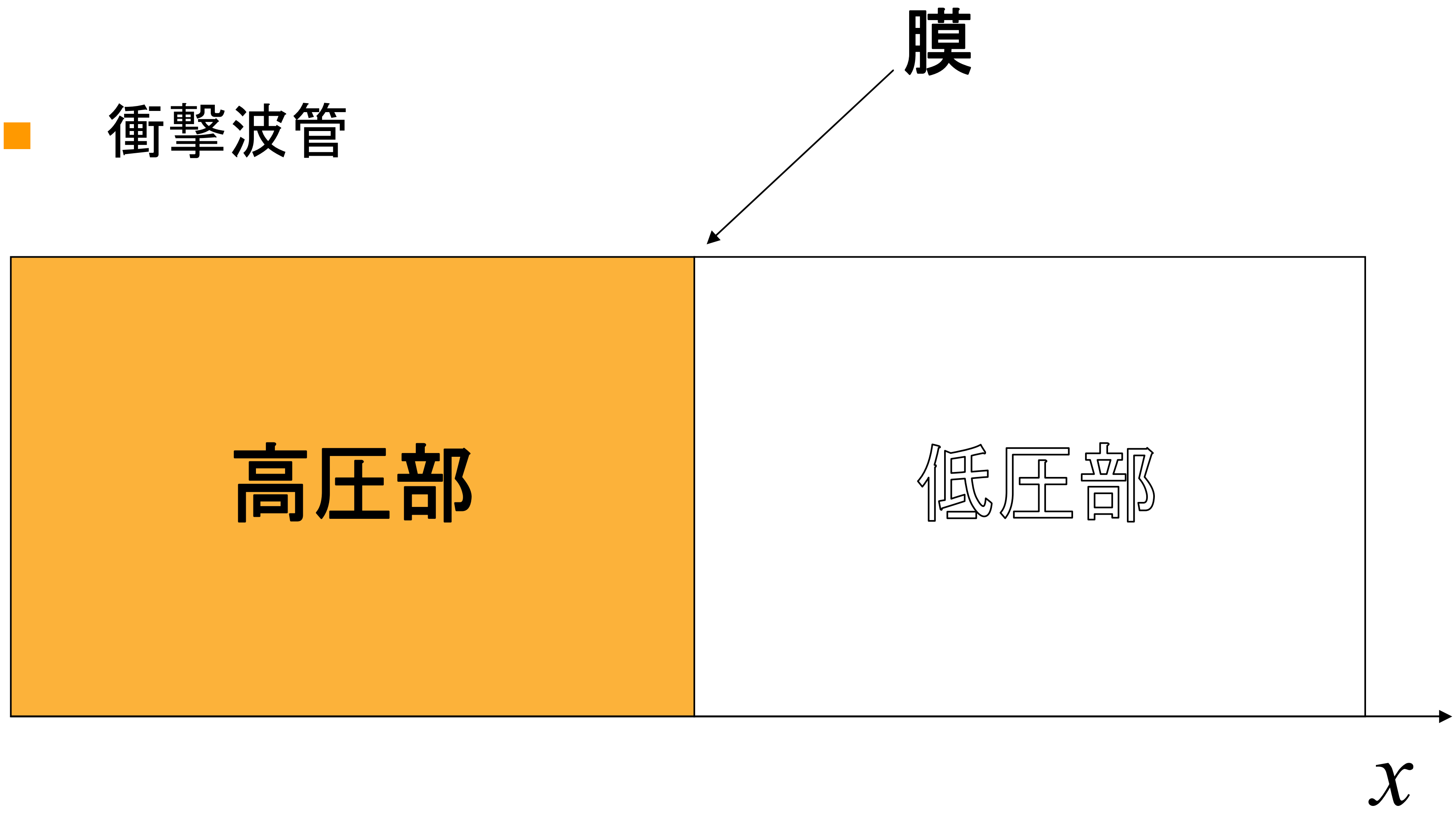


衝撃波

- 主に媒質中を超音速で移動する物体の周りに発生し、媒質中の音速よりも速い速度、すなわち超音速で伝播、急速に減衰して最終的には音波となる。
- また、波面後方で圧力・温度・密度の上昇する圧縮波であるが、自然界で発生するほとんどの衝撃波は近傍に膨張波を伴っている。

衝撃波のシミュレート

- 衝撃波管



衝撃波管の動作原理

- 衝撃波管には中心に膜が形成されている。その膜を開放することによって、高圧部の圧力が低圧部に流れ込む。その際に先頭に衝撃波が発生する。また、高圧側には圧力を減少させる膨張波が伝播していきます。

衝撃波の基礎方程式

- 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)=0$$

- 運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+q)}{\partial x}$$

- エネルギー保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}T+u\frac{\partial}{\partial x}T=-\frac{(p+q)}{\rho c_v}\frac{\partial}{\partial x}u$$

- 状態方程式

$$p=nkT \qquad n=\frac{\rho}{m}$$

それぞれの変数の物理的意味

$$\begin{cases} \rho : \text{密度} \\ p : \text{圧力} \\ u : \text{流速} \\ c_v : \text{定積比熱} \end{cases} \quad \begin{cases} T : \text{温度} \\ m : \text{気体質量} \\ n : \text{微小密度} \\ k : \text{ボルツマン定数} \end{cases}$$

粘性項の設定

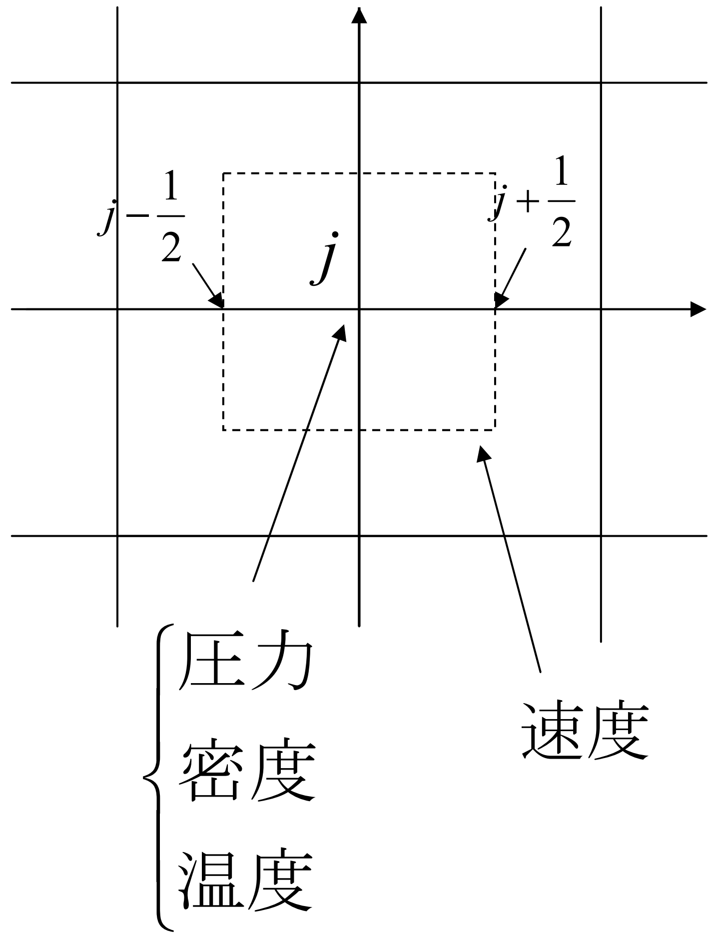
- 流体力学の計算で衝撃波の前後で物理量の不連続に起因する数値誤差が生じる。このような数値計算上の欠陥を補正するために導入した人工的な粘性項で、解の振動現象を止める収束の技法の一つとして用いられる。

人工粘性係数 $q = \begin{cases} \rho c^2 (du)^2 \, (du < 0) \\ 0 \, (du \geq 0) \end{cases}$

スタガード格子

- 変数ごとの定義点をずらして設定することにより、誤差の成長を抑えようとする方法。
- 速度は圧力、密度、温度対して格子半分だけずれた場所で定義される。

$$U_j^n = \frac{u^n_{j+\frac{1}{2}} + \left| u^n_{j+\frac{1}{2}} \right|}{2}$$



基礎方程式の離散化

- 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)=0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

$$\rho_j^{n+1}=\rho_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\rho_j^n\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)+\frac{1}{2}\left\{\left(U_j^n-\left|U_{j-1}^n\right|\right)\left(\rho_j^n-\rho_{j-1}^n\right)+\left(U_j^n-\left|U_j^n\right|\right)\left(\rho_{j+1}^n-\rho_j^n\right)\right\}\right]$$

- 状態方程式

$$p=\frac{\rho kT}{m} \longrightarrow p_j^{n+1}=\frac{\rho_j^{n+1}kT_j^{n+1}}{m}$$

- 運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho+q)}{\partial x}$$

$$\downarrow$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{2\left(\rho_j^n-\rho_{j-1}^n+q_j^n-q_{j-1}^n\right)}{\rho_j^n+\rho_{j+1}^n}+\frac{1}{2}\left\{\left(U_j^n+\left|U_j^n\right|\right)\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)-\left(U_j^n-\left|U_j^n\right|\right)\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)\right\}\right]$$

- エネルギー保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}T+u\frac{\partial}{\partial x}T=-\frac{(p+q)}{\rho c_v}\frac{\partial}{\partial x}u$$

$$\downarrow$$

$$T_j^{n+1}=T_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{\left(p_j^n+q_j^n\right)\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)}{\rho_j^n c_v}-\frac{1}{2}\left\{\left(U_j^n+\left|U_j^n\right|\right)\left(T_j^n-T_{j-1}^n\right)+\left(U_j^n-\left|U_j^n\right|\right)\left(T_{j+1}^n-T_j^n\right)\right\}\right]$$

初期条件の設定(1)

- 衝撃波管の仕組みや動作などを元に初期条件を次のように設定しました。

$$
\text{高圧部}\begin{cases} 0 \le x \le 100 \\ u = 0 \\ p = 10130 \\ T = 282 \end{cases}
\qquad
\text{低圧部}\begin{cases} 100 \le x \le 200 \\ u = 0 \\ p = 1013 \\ T = 282 \end{cases}
$$

初期条件の設定(2)

$$\begin{cases} 気体 : Kr(クリプトン) \\ 原子量 : 83.798 \\ 定積比熱 : 152 \\ 人工粘性係数 : c = 2 \\ ボルツマン定数 : k = 1.380658 \times 10^{-23} \end{cases}$$

時間範囲 : $0 \le t \le 10000$

空間格子 : $dx = 1$

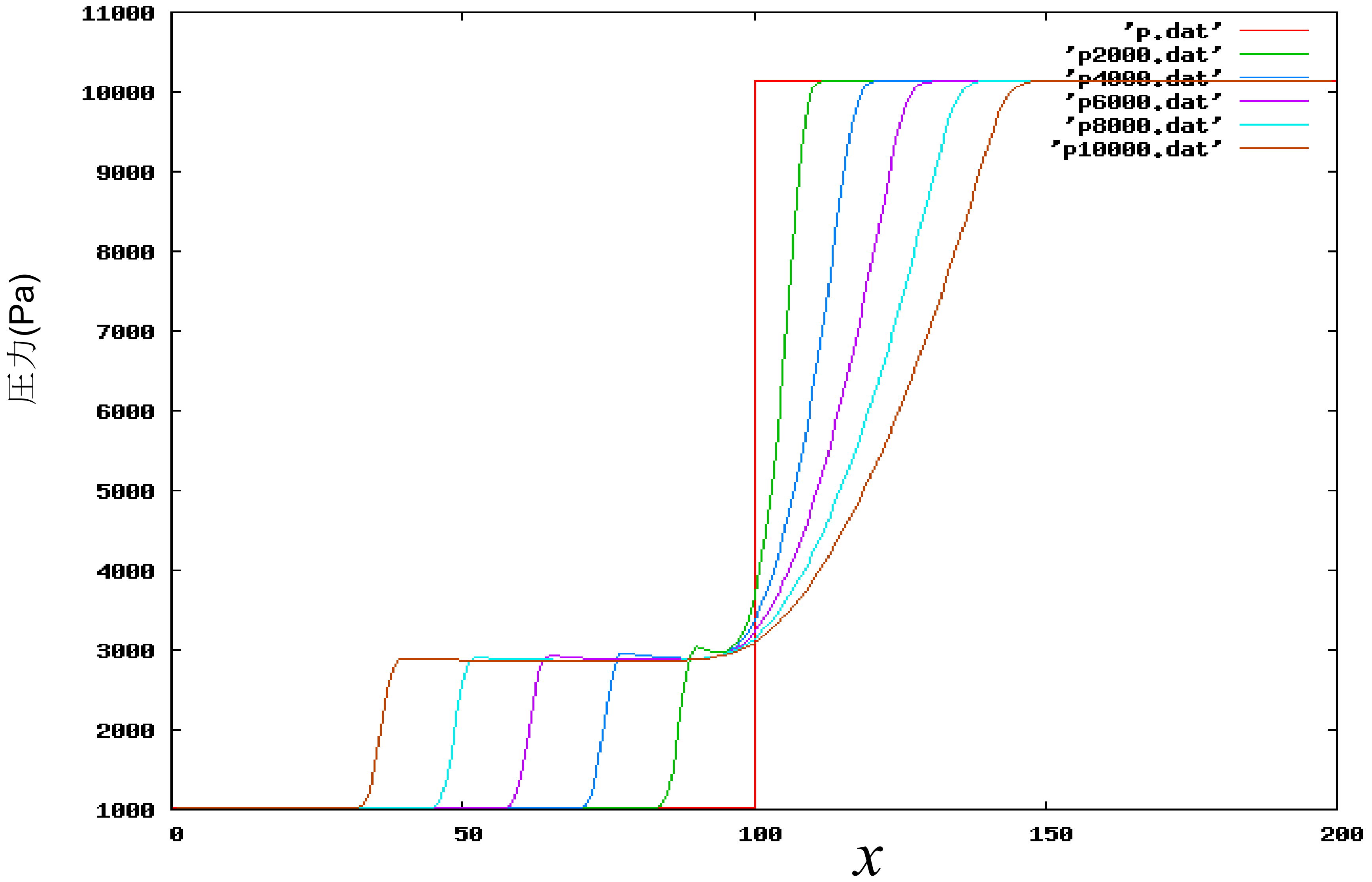
時間幅 : $dt = 2.0 \times 10^{-5}$

境界条件の設定

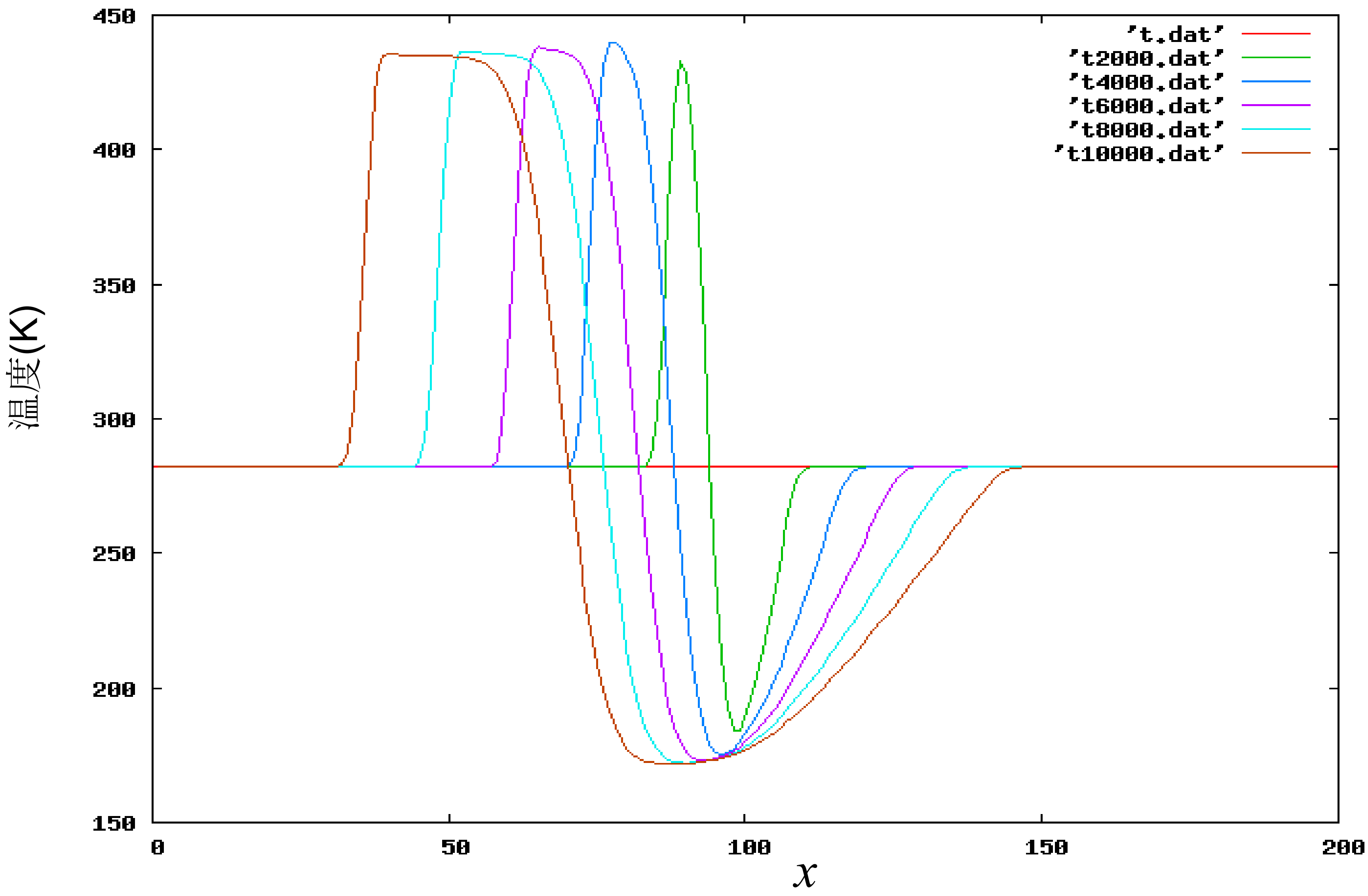
$$\begin{cases} \rho_0^n = \rho_1^{n+1} \\ \rho_{200}^n = \rho_{199}^{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0^n = 0 \\ u_{200}^n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_0^n = T_1^{n+1} \\ T_{200}^n = T_{199}^{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0^n = p_1^{n+1} \\ p_{200}^n = p_{199}^{n+1} \end{cases}$$

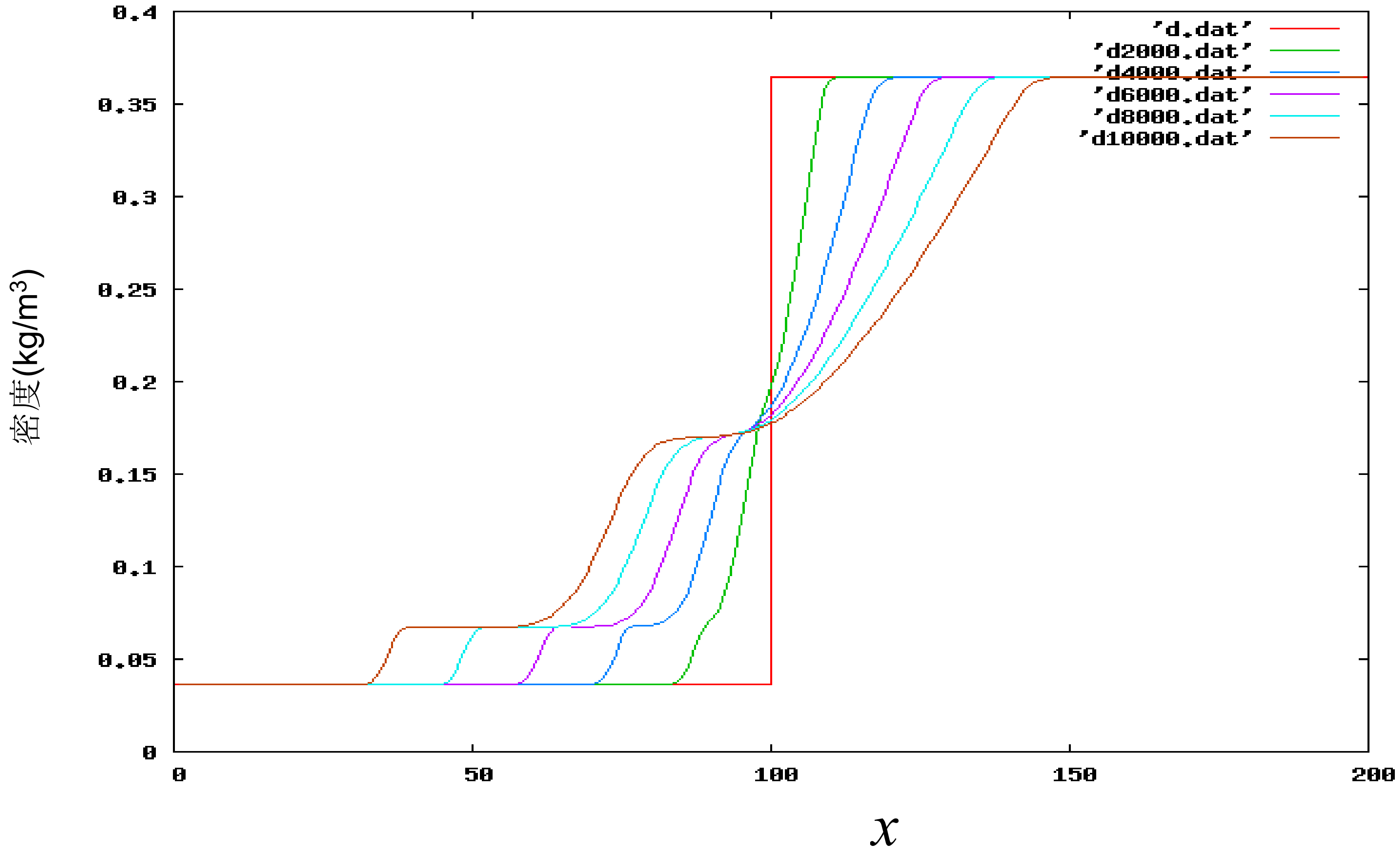
シミュレーション結果(圧力)



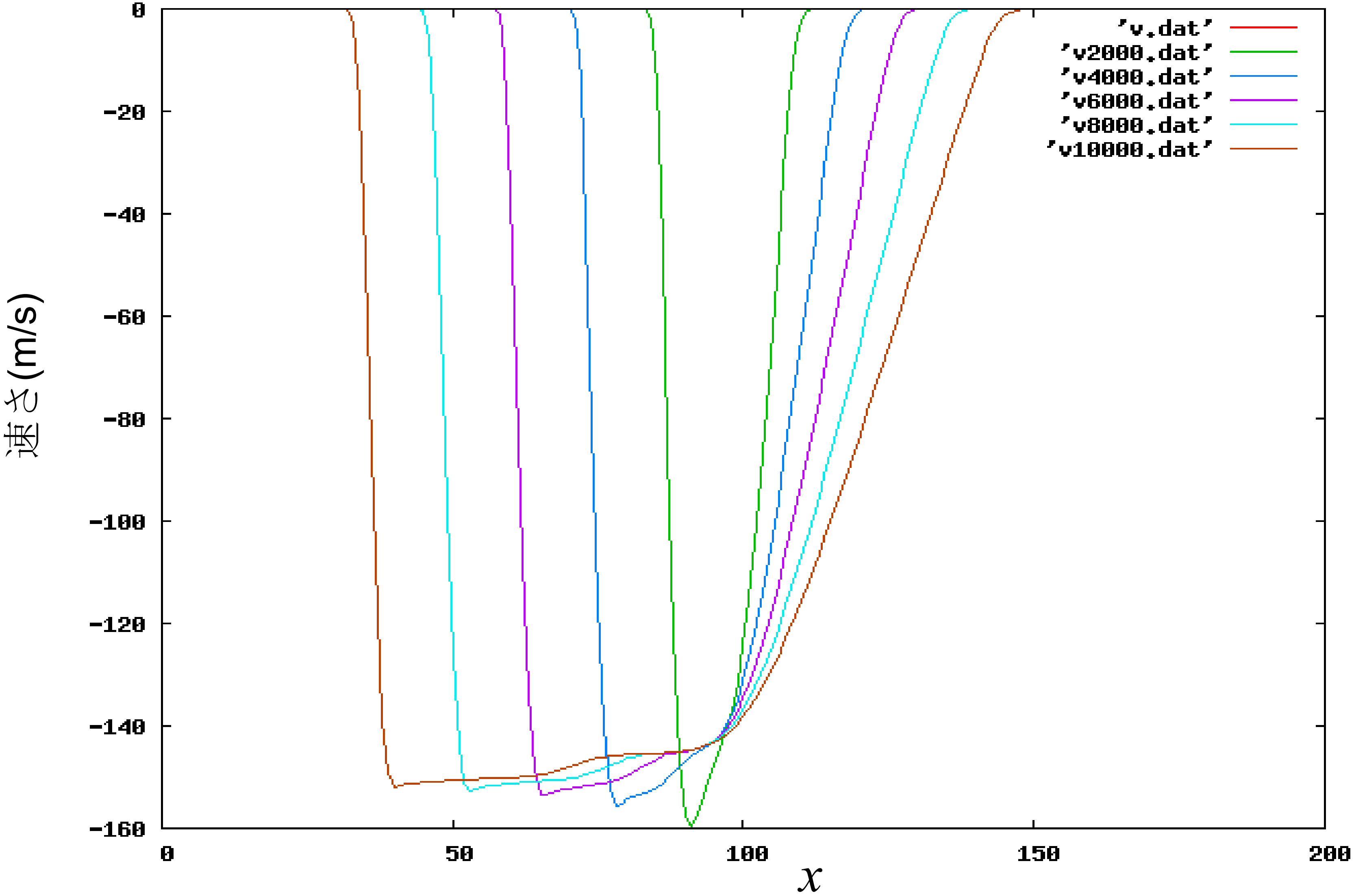
シミュレーション結果(温度)



シミュレーション結果（密度）



シミュレーション結果（速さ）



B4課題を通して

- シミュレートをする上で今まで習ったことのない分野の勉強や様々な知識や考え方が、これからもっと必要になってくると感じました。
- 時間を忘れるくらいに充実した日々を過ごせました。これからの研究室生活か楽しみです。